

LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA O ESPONENZIALE O R.I.C. (REGIME INTERESSE COMPOSTO)

La legge lineare si adatta bene ad o.f. di breve durata, perché nessuno è disposto ad accettare la condizione che gli interessi già maturati in un periodo siano infruttiferi nei periodi successivi. Nasce spontanea l'esigenza di definire una legge in cui gli interessi maturati nel periodo precedente concorrono essi stessi alla formazione d'altri interessi.

Supponiamo che alla fine di ogni periodo chiudiamo e immediatamente riapriamo il conto, così la banca sarà costretta a capitalizzarmi gli interessi. Alla fine del primo anno o periodo avremo M_1 che risulta contemporaneamente montante del primo periodo e capitale iniziale del secondo e così via. Per semplicità useremo un tasso annuo, avremo:

$$M_1 = C (1 + i)$$

$$M_2 = M_1 (1 + i) = C (1 + i) (1 + i) = C (1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2 (1 + i) = C (1 + i)^2 (1 + i) = C (1 + i)^3$$

Procedendo per induzione si ha:

$$M_n = C (1 + i)^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Anche se la legge è stata dimostrata per tempi interi vale per t qualsiasi (non necessariamente intero), infatti è un modello esponenziale, del tipo $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

$$M = C (1 + i)^t$$

Posto $C = 1$ si ha il fattore di capitalizzazione composto:

$$M = (1 + i)^t$$

Che rappresenta il montante dell'unità monetaria dopo t periodi. Si ricordi che tasso e tempo si riferiscono allo steso orizzonte temporale.

Esempi

1) Un capitale di 1.000 euro viene investito ad un tasso di interesse del 10 % annuo, con capitalizzazione annua degli interessi. Si determini il montante dopo due anni?

Il quesito invita ad applicare la capitalizzazione composta perché specifica.. “con capitalizzazione annua degli interessi”:

$$M = C (1 + i)^t = 1.000 (1 + 0.1)^2 = 1.210 \text{ €}$$

2) Trova il montante di un capitale di 7.500 € impiegato per 3 anni e 12 giorni al tasso mensile del 0,50 %.

Il tempo in mesi e frazione è $36 + 12/30 = 36.4$. Sfruttando la funzione y^x presente in qualsiasi calcolatrice scientifica si ha 1,199070305 che moltiplicato per 7.500 euro si ha:

$$M = 8.993,03 \text{ €}$$

3) Trova il montante di un capitale di 800 € impiegato per 6 anni 7 mesi e 15 giorni, al tasso unitario bimestrale di 0.01.

Il tasso applicato è bimestrale pari ad un frazionamento $k = 6$ il tempo espresso in bimestri è :

$$(6 + 7/12 + 15/360) \cdot 6 = 39,75 \text{ bimestri.}$$

Il montante è:

$$M = C (1 + i_k)^t = 800 (1 + 0,01)^{39,75} = 1188,13 \text{ €}$$

4) Tizio deposita presso la banca A 100.000,00 euro. La banca A gli corrisponde un tasso annuo di interesse del 5 % . Dopo un anno Tizio, ritira dalla banca A il montante maturato e lo deposita presso la banca B. La banca B gli corrisponde un tasso d'interesse del 6 % . Dopo un altro anno, a quanto ammonta il montante maturato?

Il montante maturato dopo due anni applicando il 5 % il primo anno e il 6 % il secondo. Tizio ritira il montante alla fine del primo anno e lo deposita presso la banca B si applica quindi la capitalizzazione composta per i due anni con i rispettivi tassi:

$$M = C (1 + 0.05) (1 + 0.06) = 111.300,00 \text{ euro.}$$