Esercizi sul teorema di Rolle.

Esercizio1

Determinare per la seguente funzione:

$$y = \frac{x^2+1}{2x+1} \qquad nell'intevallo\ [0; 2]$$

il punto o i punti che verificano il teorema di Rolle, dopo aver verificato che sussistono le ipotesi richieste dal teorema stesso.

Verifichiamo le ipotesi del teorema di Rolle:

- Vediamo se *f(x)* è continua in $[0; 2]$. Valutiamo il C. E. della funzione data:

$$2x+1 \neq 0 \qquad x \neq -\frac{1}{2} \qquad C.E. = R - \}-\frac{1}{2}\{$$

  $x = -\frac{1}{2} \notin [0; 2] \ \rightarrow f$ è continua in $[0; 2]$

- Verifichiamo se *f(x)* è derivabile in $(0; 2)$

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1)-(x^2+1)2}{(2x+1)^2} = \frac{2(2x^2+x-x^2-1)}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2+x-1)}{(2x+1)^2}$$

  $f'(x)$ esiste in $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow f$ è derivabile in $(0; 2)$

- Verifichiamo che $f(a) = f(b)$

  $f(0) = \frac{1}{1} = 1 \qquad f(2) = \frac{4+1}{4+1} = \frac{5}{5} = 1 \ \Longrightarrow$è verificata anche la terza ipotesi del teorema di Rolle.

  Andiamo a determinare $c \in (0; 2)/f'(c) = 0$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-1)}{(2x+1)^2}$$

  Quindi:

$$f'(c) = \frac{2(c^2+c-1)}{(2c+1)^2} = 0$$

  $2(c^2+c-1) = 0$

  $c^2+c-1 = 0$

  $c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

  $c_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0; 2]; \ c_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0; 2)$

Esercizio2

Determinare per la seguente funzione:

$$y = \sqrt{3x - x^2} \quad in \quad [0; 3]$$

il punto o i punti che verificano il teorema di Rolle, dopo aver verificato che sussistono le ipotesi richieste dal teorema stesso.

Verifichiamo le ipotesi del teorema di Rolle:

- Determiniamo il C. E. per verificare dove la funzione è continua, essendo una irrazionale si pone: $3x - x^2 \geq 0$

  Determiniamo le radici:

  $3x - x^2 = 0$

  $x(3 - x) = 0$

  $x = 0 \quad x = 3$

  Quindi: $0 \leq x \leq 3$

  D: $[0; 3] \rightarrow f(x)$ è continua in $[0; 3]$

- Verifichiamo se $f(x)$ è derivabile in (0;3):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(3x - x^2)}}(3 - 2x) = \frac{(3 - 2x)}{2\sqrt{(3x - x^2)}}$$

  $f'(x)$ esiste in (0;3) dunque $f(x)$è derivabile in (0;3)

- Verifichiamo che $f(a) = f(b)$

  $f(0) = 1 \qquad f(3) = 0$

  Andiamo a determinare $\exists! \, c \in (0,3) / f'(c) = 0$

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x)}{2\sqrt{(3x - x^2)}}$$

$$f'(xc) = \frac{(3 - 2c)}{2\sqrt{(3c - c^2)}} = 0$$

  $(3 - 2c) = 0 \Rightarrow 3 - c = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \ \frac{3}{2} \in (0; 3)$