Esercizi svolti: campi di definizione di funzioni reali

Esercizio 1

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{\log x + 2}{\log^2 x - 1}\right)$$

La funzione data è una funzione composta; per primo incontriamo il logaritmo pertanto il suo argomento deve essere positivo, a sua volta l'argomento è una funzione fratta pertanto il denominatore deve essere diverso da zero ed inoltre vi è *logx* il quale esiste se e solo se il suo argomento, *x*, è maggiore di zero; pertanto il dominio della funzione data sarà soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\log x + 2}{\log^2 x - 1} \rangle 0 \\ x \rangle 0 \\ \log^2 x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

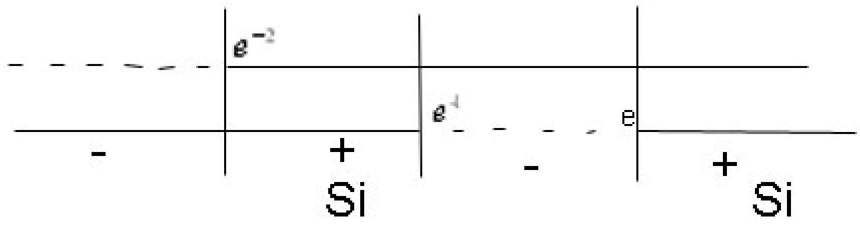
Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{\log x + 2}{\log^2 x - 1} \rangle 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:

$$\begin{bmatrix} \log x + 2 > 0 \\ \log^2 x - 1 > 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \log x > -2 \\ \log x < -1 \text{ e } \log x > 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x > e^{-2} \\ x < e^{-1} \text{ e } x > e \end{bmatrix}$$

Rappresentiamo le soluzioni:



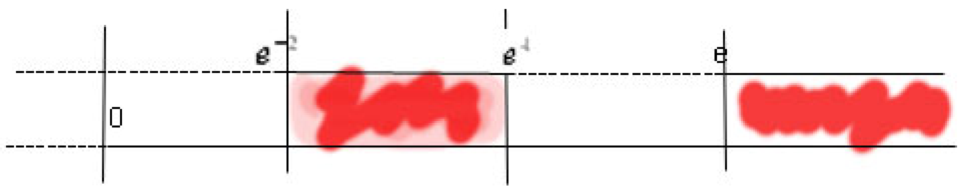
La soluzione della prima disequazione è:

$e^{-2} < x < e^{-1} \cup x > e$

Pertanto il sistema è divenuto:

$$\begin{cases} e^{-2} < x < e^{-1} \cup x > e \\ x \rangle 0 \\ x \neq \frac{1}{e}, \quad e \end{cases}$$

Rappresentiamo il sistema per determinare la soluzione:



Pertanto il campo di esistenza della funzione data è la parte comune evidenziata in fig. 2 in rosso ovvero:

$$\left]e^{-2};e^{-1}\right[\cup \left]e;+\infty\right[$$

Esercizio 2

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\log\left(tg^2 x - 3\right)}{sen^2 x - 1} + \sqrt[4]{\cos x}$$

Dobbiamo garantirci l'esistenza della funzione logaritmica pertanto dobbiamo porre l'argomento della funzione maggiore di zero, $tg^2 x - 3 \rangle 0$, dobbiamo garantirci che il denominatore sia diverso da zero: $sen^2 x - 1 \neq 0$, che esista la radice, quindi il radicando deve essere maggiore/uguale a zero: $\cos x \geq 0$; la *tgx* esiste per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pertanto deve essere:

$$\begin{cases} tg^2 x - 3 \rangle 0 \\ sen^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni:

$tg^2 x - 3 \rangle 0 \Leftrightarrow tgx \langle -\sqrt{3}$ e $\mathrm{tgx} \rangle \sqrt{3}$

$tgx \langle -\sqrt{3} \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \langle x \langle \frac{2}{3}\pi + k\pi$ e $\frac{3}{2}\pi + k\pi \langle x \langle \frac{5}{3}\pi + k\pi$

$tgx \rangle \sqrt{3} \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \langle x \langle \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\frac{4}{3}\pi + k\pi \langle x \langle \frac{3}{2}\pi + k\pi$

$\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \quad 0 + 2\mathrm{k}\pi \leq \mathrm{x} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$sen^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow senx \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\mathrm{x} \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

Pertanto il sistema diventa:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\pi + k\pi \langle x \langle \frac{5}{3}\pi + k\pi \quad \frac{4}{3}\pi + k\pi \langle x \langle \frac{3}{2}\pi + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{e} \quad \mathrm{x} \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ 0 + 2\mathrm{k}\pi \leq \mathrm{x} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Dal grafico delle soluzioni risulta che il dominio è:

$$\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$$

Esercizio 3

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = (log^2x - 5logx + 4)^{\sqrt{2-logx}}$$

La funzione data esiste se la base è positiva e l'argomento del logaritmo è positivo ed inoltre deve essere maggiore o uguale a zero il radicando della radice, ovvero deve essere verificato il seguente sistema:

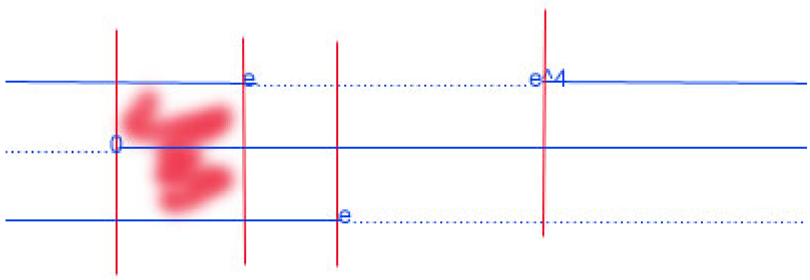
$$\begin{cases} log^2x - 5logx + 4 < 0 \\ x > 0 \\ 2 - logx \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema diviene:

$$\begin{cases} logx < 1 \quad\quad logx > 4 \\ x > 0 \\ logx \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < e \quad\quad x > e^4 \\ x > 0 \\ x \leq e^2 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni:



Quindi **D**:$]0; e[$