

Disequazioni fratte – esercizi svolti- SEMPLICI

1. Calcolare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{x-2}{x^2+1} > 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

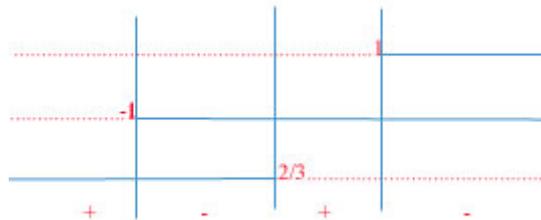
2. Calcolare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{(x-1)(2-3x)}{(x+1)} > 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-3x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < 2/3 \\ x > -1 \end{cases}$$

Rappresentiamo le soluzioni e facciamo il prodotto dei segni:



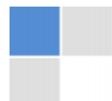
Quindi la disequazione è verificata lì dove il prodotto è venuto positivo ovvero:

$$S: x < -1 \text{ e } 2/3 < x < 1$$

3. Calcolare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{(-x^2+4x+1)}{(x-2)(x^2+1)} > 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:



$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

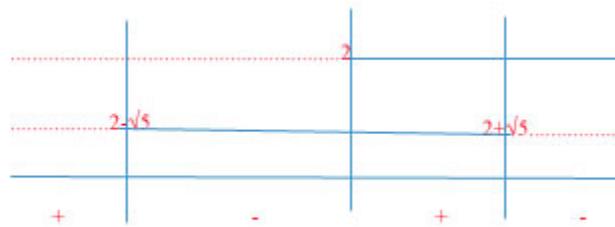
Troviamo le radici della prima:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Pertanto :

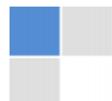
$$\begin{cases} 2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5} \\ x > 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Rappresentiamo le soluzioni e facciamo il prodotto dei segni:



Quindi la soluzione è:

$$S: x \in (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}) \cap (2, \infty) = (2, 2 + \sqrt{5})$$



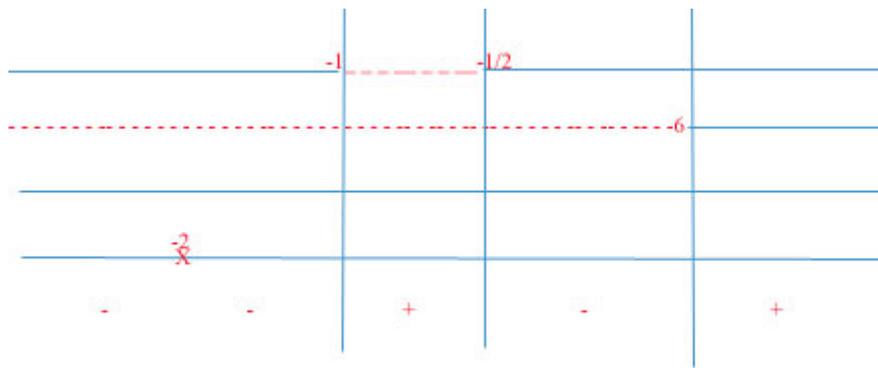
4. Calcolare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{(2x^2 + 3x + 1)(x - 6)}{(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 1)} \geq 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:

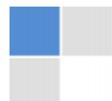
$$\begin{cases} (2x^2 + 3x + 1) \geq 0 \\ (x - 6) \geq 0 \\ (x^2 + 2x + 4) > 0 \\ (x^2 + 1) > 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -1, x \geq -1/2 \\ x \geq 6 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} ;$$

Rappresentiamo le soluzioni e facciamo il prodotto dei segni:



Quindi la soluzione è:

$$S: x < -2; -2 < x < -1; -1/2 < x < 6$$



5. Risolvere la disequazione $\frac{x}{x-a} \geq \frac{x}{3}$

Il denominatore è non nullo se $x-a \neq 0 \Rightarrow x \neq a$

Portiamo tutto al primo membro:

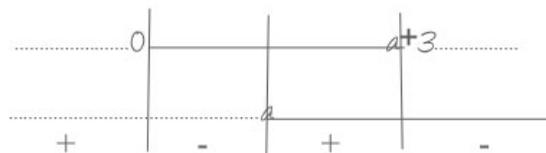
$$\frac{x}{x-a} - \frac{x}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x - x(x-a)}{3(x-a)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2 + ax + 3x}{3(x-a)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + (a+3)x}{3(x-a)} \geq 0$$

Poniamo numeratore e denominatore maggiore di zero:

$$\begin{cases} -x^2 + (a+3)x \geq 0 \\ 3(x-a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a+3 \\ x > a \end{cases}$$

Disegniamo le soluzioni e facciamo il prodotto dei segni:



La soluzione è S:

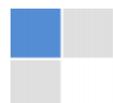
$$x \leq 0; a < x \leq a+3$$

6. Risolvere la disequazione $\frac{x^2 - x - 1}{x+2} \leq 3 - x$

la condizione da imporre perché non si annulli il denominatore è $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

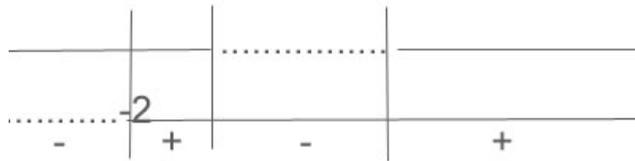
$$\frac{x^2 - x - 1}{x+2} - (3-x) \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 1 - (3-x)(x+2)}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1 - 3x - 6 + x^2 + 2x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x - 7}{x+2} \leq 0$$



$$\begin{cases} 2x^2 - 2x - 7 \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{1 - \sqrt{15}}{2}; x \geq \frac{1 + \sqrt{15}}{2} \\ x > -2 \end{cases}$$

Disegniamo le soluzioni e facciamo il prodotto dei segni:



La soluzione è S:

$$x \leq -2; \frac{1 - \sqrt{15}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{15}}{2}$$

